泊松冲击下不同质部件 $k/n(G)$ 系统的可靠性分析

梁香青[1],占德胜[2],唐加山[3]

(1. 南京审计学院 经济学院, 江苏 南京 210029;
2. 马鞍山职业技术学院, 安徽 马鞍山 243031;
3. 南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210003)

摘 要: 假设一个系统由 n 个质量不同的部件组成,当系统中至少有 k 个部件工作时系统才能正常工作,该系统受到一类齐次泊松过程到达的冲击,冲击量服从某一个分布,每当一个冲击到达时,都会独立的对 n 个部件产生影响,每个部件以一定的概率产生故障,故障概率不但是冲击量的函数,而且与具体的部件有关,另外还假定各次冲击独立的对系统造成损失,对于此泊松冲击下的不同质部件的 $k/n(G)$ 系统,显式给出了系统的可靠度函数以及系统的平均工作时间等性能指标,推广了已有文献中的结果。

关键词: 冲击模型;泊松过程;$k/n(G)$ 系统;可靠性指标

中图分类号: O211.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-8750(2010)02-0080-04 **收稿日期:** 2009-06-20

作者简介: 梁香青(1971—),女,浙江黄岩人,南京审计学院经济学院副教授,主要研究方向为区域经济与产业经济、数理统计;占德胜(1968—),男,安徽怀宁人,马鞍山职业技术学院讲师,主要研究方向为微分方程;唐加山(1968—),男,安徽天长人,南京邮电大学理学院副院长,统计系主任,教授,硕士生导师,博士,主要研究方向为概率论、应用随机过程、排队论以及信号与信息处理。

一、引言

可靠性在自然科学以及工程技术领域都有着非常广泛的应用,其理论研究一直颇受学术界关注和重视,在可靠性理论中,$k/n(G)$ 系统是一类重要的模型系统,它是一个由 n 个部件组成的系统,当且仅当其中至少有 k 个部件正常工作时系统才正常工作,否则系统将出现故障[1],且该类系统具有非常重要的应用价值。

在实际生活中,由于系统运行的环境通常是不稳定的,因此在可变环境下研究系统的可靠性问题具有重要的理论和现实意义。最近王冠军和张元林撰文对在泊松冲击下 $k/n(G)$ 系统的可靠性问题进行了研究[3],他们在假设系统中的不同部件具有相同参数性质的条件下得出了相应的结论,然而在实际模型中,不同部件的质量通常是不同的,故本文在组成系统的各个部件质量不必相同的条件下研究了类似的问题,通过分析显式给出了所考虑系统的可靠度函数等可靠性性能指标,推广了文献[3]中的结果。

二、模型的描述及主要结果

对于本文要研究的在冲击环境下的 $k/n(G)$ 系统模型,笔者作如下假设:

(A1) 该系统由 $n(\geqslant 1)$ 个不同的部件组成,当且仅当至少有 $k(\leqslant n)$ 个部件工作时,系统才正常工作;

(A2) 系统不断受到某种冲击,冲击流构成一个参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$,每次冲击的量 $\hat{X}$ 都是一个独立的且分布函数为 F 的随机变量;

（A3）冲击到达时,每个部件都会受到影响,其中第 i 个部件的阀值是一个参数为 τ_i 的随机变量,它的分布为 Φ_i,$(i=1, 2, \cdots, n)$,当冲击量超过阀值时部件故障,各部件的阀值是相互独立的;

（A4）系统只有在受到冲击时才会出现故障。

由模型的假设可知,对于任意的 $1\leqslant i\leqslant n$,当冲击量为 $\hat{x}$ 时,第 i 个部件故障的概率为 $\Phi_i(\hat{x})=P(\tau_i\leqslant\hat{x})$,然而由于冲击量是一个随机变量 $\hat{X}$,因此第 i 个部件的条件故障概率是一个随机变量 $\Phi_i(\hat{X})$,其概率分布为:

$$G_i(x)=P(\Phi_i(\hat{X})\leqslant x)=P(\hat{X}\leqslant\Phi_i^{-1}(x))=F(\Phi_i^{-1}(x)),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1。$$

由此可知,其平均故障概率为:

$$E\Phi_i(\hat{X})=\int_0^\infty\Phi_i(\hat{x})dF(\hat{x})=P(\hat{X}>\tau_i)$$

上面第二个等号表明对于冲击量 $\hat{X}$,第 i 个部件的平均故障概率与在同样冲击下该部件故障概率是一致的。

对于上述可靠性系统,定义系统的工作时间为 T,则 $\overline{H}(t)=P(T>t)$ 称为是冲击模型的可靠度函数,在给出本文的主要定理之前,先介绍下面的引理。

引理 1 在一次冲击下,部件 $j_1<\cdots<j_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 保持完好的概率为

$$p_{j_1\cdots j_k}=\int_0^\infty\overline{\Phi_{j_1}}(\hat{x})\cdots\overline{\Phi_{j_k}}(\hat{x})dF(\hat{x})\tag{1}$$

其中 $\overline{\Phi_j}(x)=1-\Phi_j(x)$, $1\leqslant j\leqslant n$。

证明 根据系统模型的定义,直接计算可得:

$$\begin{aligned}p_{j_1\cdots j_k}&=P(\hat{X}<\tau_{j_1},\cdots,\hat{X}<\tau_{j_k})\\&=\int_0^\infty P(\hat{x}<\tau_{j_1},\cdots,\hat{x}<\tau_{j_k})dF(\hat{x})\\&=\int_0^\infty P(\hat{x}<\tau_{j_1})\cdots P(\hat{x}<\tau_{j_k})dF(\hat{x})\\&=\int_0^\infty\overline{\Phi_{j_1}}(\hat{x})\cdots\overline{\Phi_{j_k}}(\hat{x})dF(\hat{x})\end{aligned}$$

下面是笔者对主要定理的论证:

定理 1 对于本文中的泊松冲击模型,系统的可靠度函数为:

$$\overline{H}(t)=\sum_{r=k}^{n}\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^iC_{r+i}^r\sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i}\\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}}\mathrm{e}^{-\lambda(1-p_{j_1\cdots j_{r+i}})t}\tag{2}$$

为了证明上述定理,需要下面的引理:

引理 2[4] 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是 n 个事件,则 $A_1, \cdots, A_n$ 中恰好有 r 个事件发生的概率为:

$$p=\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^iC_{r+i}^r\sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i}\\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}}P(A_{j_1}\cdots A_{j_{r+i}})$$

定理 1 的证明 由系统可靠度函数的定义可知,若记 $B_r(t)$ 表示 t 时刻恰好有 r 个部件完好的事件,则有:

$$\begin{aligned}\overline{H}(t)&=P(T>t)\\&=\sum_{\ell=0}^{\infty}P(T>t\mid N(t)=\ell)P(N(t)=\ell)\\&=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{n}P(B_r(t)\mid N(t)=\ell)P(N(t)=\ell)\end{aligned}$$

由引理 2 可得:

$$P(B_r(t) \mid N(t)=\ell) = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^r C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} P^\ell(\text{部件 } j_1 < \cdots < j_{r+i} \text{ 完好})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} p_{j_1\cdots j_{r+i}}^\ell$$

其中 $p_{j_1\cdots j_{r+i}}$ 由引理 1 给出，综上可得：

$$\overline{H}(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=k}^{n} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} p_{j_1\cdots j_{r+i}}^\ell \frac{(\lambda t)^\ell}{\ell!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{r=k}^{n} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(p_{j_1\cdots j_{r+i}} \lambda t)^\ell}{\ell!} \right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{r=k}^{n} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} \mathrm{e}^{-\lambda(1-p_{j_1\cdots j_{r+i}})t}$$

定理证毕。

由定理 1 可以得下面的定理 2。

定理 2　系统的平均工作时间为：

$$ET = \int_0^\infty \overline{H}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{r=k}^{n} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^r C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} \frac{1}{\lambda(1-p_{j_1\cdots j_{r+i}})}$$

由直接计算可得以下的推论。

推论 1　对于 n 个部件的串联系统，即 $k=n$ 的情形，系统的可靠度函数为：

$$\overline{H}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-p_{j_1\cdots j_n})t}$$

而平均寿命为：

$$ET = \frac{1}{\lambda(1-p_{j_1\cdots j_n})}$$

推论 2　对于 n 个部件的并联系统，即 $k=1$ 的情形，系统的可靠度函数为：

$$\overline{H}(t) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i C_{r+i}^r \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{r+i} \\ j_k=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,r+i}} \mathrm{e}^{-\lambda(1-p_{j_1\cdots j_{r+i}})t}$$

本文的主要结论，即定理 1 是文献[3]中定理 2.1 的推广，直接计算可得，当组成系统的各个部件的质量相同时，本文的定理 1 就退化为文献[3]中的定理 2.1，另外，在每次冲击量为常值或者各个部件的阀值为常数的情况下，容易得到系统的可靠度函数以及相应的平均工作时间，详情略。

三、结束语

本文研究了一类由泊松过程所描述的冲击环境下的可靠性 $k/n(G)$ 系统，该系统由 n 个质量可能不同的部件组成，每次冲击都独立的对系统的部件造成损失，冲击量的大小是一个随机变量，各部件的故障阀值也是随机变量，当冲击量大于阀值时会造成部件故障。本文给出了该类系统的可靠度函数以及其他的性能指标。当组成系统的各部件同质时，文中的结论就退化为文献[3]的结果。

参考文献：

[1]程侃. 寿命分布类与可靠性数学理论[M]. 北京：科学出版社，1999.

[2]Kuo W, Zuo M J. Optimal reliability modeling, principles and applications[M]. New York: John Wiley & Sons, 2003.

[3]王冠军，张元林. Poisson 冲击下的 k/n(G)系统的可靠性分析[J]. 应用概率统计，2009，25(1)：1－11.

[4] Ross S M. Stochastic process [M]. New York: Wiley, 1982.

（责任编辑：黄　燕　许成安）

Reliability Analysis for $k/n(G)$ System with Possible Different Components under Poisson Shock

LIANG Xiang-qing[1], ZHAN De-sheng[2], TANG Jia-shan[3]

(1. School of Economics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China;

2. Maanshan Institute of Professional Technology, Ma'anshan 243031, China;

3. College of Science, Nanjing University of Posts snd Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: Suppose that there is a system which consists of n different components, in which at least k out k of n components must be good for the system to be good. Assume that the system is shocked by a homogenous Poisson stream. The quantity of each shock is a random variable. As a shock arrived, the failure probability of a component is not only a function of the quantity but also related to the specific component itself. The failure probability of each component is possibly different and independent from the others. We also assume that the effect of each shock is independent from the others. Under these conditions, we explicitly give the system reliability function, the system average working period and etc, which extends the results in the literature.

Key words: reliability analysis; $k/n(G)$ system; poisson process; shock model

（上接第41页）

参考文献：

[1] 国家环保总局.《环境监测指标实施规定》[S].

[2] 国家环保总局.《环境空气质量标准》(GB3095—1996)[S].

[3] 国家环保总局.《地表水环境质量标准》(GB3838—2002)[S].

[4] 国家环保总局.《地下水质量标准》(GB/T14848—93)[S].

[5] 国家环保总局.《城市区域环境噪声标准》(GB3096—93)[S].

[6] 李山梅. 环境绩效审计研究——兼评矿业城市环境问题[J]. 中国地质大学学报, 2009(1):35.

[7] 段永瑞. 数据包络分析——理论和应用[M]. 上海：上海科学出版社, 2006:343-347.

[8] 仲生辉. 环境审计评价指标的建立和应用研究[J]. 审计月刊, 2007(6):56-58.

[9] 张楚堂, 王赟. 绿色GDP绩效审计评价指标体系设计[J]. 台声, 2005(4):47-48.

[10] 贾艳红, 赵军. 白银市区域生态环境质量评价研究[J]. 西北师范大学学报：自然科学版, 2004(4):40.

（责任编辑：杨凤春）

On Index System for Territorial Environment Management Performance Evaluation

ZHOU Zhi-hao[1], ZHANG Hong-bin[2], XU Jian[1], GE Juan[2]

(1. Suzhou Audit Bureau, Suzhou 215004, China;

2. School of Computer Science and Technology, Suzhou University, Suzhou 215006, China)

Abstract: Academic research and practical exploration of environment audit just started in China. This article discusses the environment management performance evaluation index system, which is the key factor of environment audit. We finished some environment audit enquiries and gained some experience. Based on this, a model on territorial environment management performance evaluation is proposed and the corresponding index system is established guided by ISO 14031 environment standard.

Key words: environment management; performance evaluation; index system; environment audit