基于VaR的信用风险定价

刘广应

(南京审计学院 数学与统计学院, 江苏 南京 210029)

摘　要:将VaR方法引入到可违约债券定价模型中,发现当可违约债券的在险价值超过确定的边界时,债券发生违约。本文分析了违约边界可能形式,给出在无风险利率为常数时的定价公式,提出可以利用Monte Carlo来求解价格公式,并得到数值解,还分析了当无风险利率随时间变化时的情形。

关键词:VaR;信用风险;可违约债券;首达时

中图分类号:F830.59　**文献标识码**:A　**文章编号**:1672-8750(2010)03-0019-05　**收稿日期**:2010-05-20

作者简介:刘广应(1980—),男,安徽合肥人,南京审计学院数学与统计学院讲师,复旦大学管理学院博士生,主要研究方向为金融风险与应用统计。

基金项目:江苏省高校自然基金项目(08KJD110011);南京审计学院校级课题(NSK2009/B06,NSK2009/C05)

一、引言

信用风险主要包括违约风险和价差风险。违约风险是债务人没能力或不愿意按时进行利息或本金支付,即债务人未能如期偿还债务造成违约给经济主体带来的风险。价差风险是由于借款人信用评级的变动或履约能力的变化导致其债务市场价值发生变动而引起损失的可能性。

信用风险一直是银行等金融机构面临的最主要风险。在过去数十年内,关于信用风险定价的研究文献很多。目前国际上信用风险定价方法主要有结构法(structural model)和简氏法(reduced-form model)两种。结构法由Merton于1973年提出。Merton假定公司价值服从几何布朗运动,将违约时刻定义为公司价值小于某个事先确定的边界时。他认为,违约是一种内生的变量,是可以预料的[1]。结构模型具有非常明确的经济意义,许多学者对Merton模型进行了研究和推广[2-8]。对Merton模型的推广主要有三个方面:一是对违约时刻定义的推广,将违约时刻定义为价值过程首次到达一个确定的或随机的边界,这种模型也称为首达时模型,如Black和Cox[2]。二是对公司价值模型的推广,将跳模型或随机波动率引入进来,如Zhou[6], Schere[7], Fouque[9]等。三是将随机利率引入模型中来,如Shimko[4],Leland[5]等。还有许多研究者对结构模型进行了实证检验,如Bharath等[8]。结构模型将违约事件与公司偿还债务能力联系起来,以一种直观的方式定义了违约时间,而且该模型中可违约债券风险对冲与标准的Black-Scholes对冲方法相同。该模型已经成功地应用于商业中的信用风险评估,穆迪的KMV公司利用期权定价理论和Merton模型创立了违约预测模型——信用监测模型(credit monitor model),用来对上市公司和上市银行的信用风险特别是它们的违约状况进行预测,引起了传统信用风险度量方法的一场变革。

简氏模型可以追溯到20世纪90年代,Artzner、Delbaen、Jarrow、Turnbull、Singleton、Lando等人都作出过杰出的贡献[10-15]。相对于结构模型,简氏模型回避了对无法观察的公司价值进行建模的难题。简氏模型认为,当违约强度达到一定条件时,公司将发生违约,一般假设违约强度过程是依赖于外生状

态变量的一跳过程(a jump processes)。该模型从经济意义上反映了“违约是由宏观因子和公司特有因素共同驱动”的现实,可以用来探究宏观因素对未定权益定价产生的影响。但由于违约过程是不可观察的,与结构模型相比,简氏模型中违约时刻是不可预料的。

VaR 即在险价值,是在一定的置信水平下、一定的时间内组合价值的最大损失值。作为一种风险测量和管理工具,VaR 方法是由 G-30 集团在 1993 年的《衍生产品的实践和规则》报告中首次提出,并迅速得到广泛应用[16]。VaR 方法受到了巴塞尔委员会的肯定和推荐,也得到了银行等金融机构的广泛认同与应用。现实中一般机构投资者都利用 VaR 方法来评价和管理金融风险。对可违约债券信用风险的管理控制也可以利用 VaR 方法。随着时间的推移,债券的 VaR 也在变化。当债券的在险价值高于机构投资者所能承受的水平或高于机构投资者所认为合理的水平时,他们将会在市场上抛售此公司债券,进而引起该债券的价格下降,直至降到合理水平。因而可以认为债券的违约时刻为该债券的在险价值大于某一边界时刻的时候。本文将 VaR 方法引入到信用风险定价模型中,讨论可违约债券的定价问题。

二、模型的描述与建立

(一) 违约时刻分析

假设机构投资者以在险价值来评价债券投资的风险,当该债券的在险价值高于边界或高于合理水平时,债券的风险增大,他们将在资本市场中卖出该债券。鉴于机构投资者在市场中占有较大的份额,且在市场上具有一定的影响力和号召力,他们的决策将使得债券的价格降低,使得预期收益率升高,信用价差增大。因此可以利用在险价值来分析债券的价格。假定债券的违约时刻定义为在险价值首次到达某一边界时刻,当达到违约时刻时,机构投资者将会减持债券或调低债券的信用等级,以达到市场价格与理论价格一致。

设公司 t 时刻的公司价值为 V_t,债券的到期时刻为 T,F_t 为 t 时刻的信息集合,V_t 为带域流概率空间 $(\Omega,F,(F_t)_{0\leqslant t\leqslant T},P)$ 上的随机过程,α 为置信水平,则在 t 时刻公司价值为 V_t,置信水平为 α 的在险价值 $\mathrm{VaR}(V_t,\alpha)$ 定义为

$$P(V_T\geqslant \mathrm{VaR}(V_t,\alpha)\mid F_t)=\alpha \tag{1}$$

债券的违约时刻定义为

$$\tau=\inf\{t\geqslant 0,\mathrm{VaR}(V_t,\alpha)\geqslant K(t)\} \tag{2}$$

$K(t)$ 为违约边界。违约边界为机构投资者根据自己管理风险的目标而设定的边界。

(二) 债券价值分析

首先分析一种比较简单的公司债券,考虑一只零息债券的当前价格,设到期时的支付为 1 元,当前时刻为 t 时刻,如果该债券违约,则投资者可以回收 R 元,即回收率为 $R(0<R<1)$,无风险收益率为 r,利用风险中性定价原理,可以得到当前时刻的合理价格为

$$C(t,T)=E\{1_{\tau>T}\exp(-r(T-t))+R1_{\tau\leqslant T}\exp(-r(\tau-t))\} \tag{3}$$

这里的期望是在风险中性概率下取得的。此时信用价差为

$$y(t,T)=-\frac{1}{T-t}\ln C(t,T)-r。$$

(三) 违约边界分析

为了得到合理违约边界,假设公司价值过程服从几何布朗运动。根据风险中性定价原理,我们不妨假定 P 为风险中性概率,且有

$$\mathrm{d}V_t=rV_t\mathrm{d}t+\sigma V_t\mathrm{d}B_t,0\leqslant t\leqslant T \tag{4}$$

其中 σ 为公司价值的波动率,r 为无风险利率,$B=(B_t)_{0\leqslant t}$ 为布朗运动。利用伊托引理可以解得

$$V_T=V_t\exp\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(B_T-B_t)\} \tag{5}$$

因而

$$\alpha = P(V_T \geqslant \mathrm{VaR}(V_t,\alpha) \mid F_t) = P(\ln \frac{V_T}{V_t} \geqslant \ln \frac{\mathrm{VaR}(V_t,\alpha)}{V_t} \mid F_t)$$

于是有

$$\ln \frac{V_T}{V_t} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t) \sim N(\mu, {\sigma_1}^2)$$

其中$\mu = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$，${\sigma_1}^2 = \sigma^2(T-t)$。

记 Φ_α 为正态分布的下侧 α 分位数，$P(U \geqslant \Phi_\alpha) = \alpha$，这里的 U 为标准正态分布。利用正态分布的性质，可以得到

$$\ln \frac{\mathrm{VaR}(V_t,\alpha)}{V_t} = \mu - \Phi_\alpha \sigma_1 = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T-t}$$

也即 $$\mathrm{VaR}(V_t,\alpha) = V_t \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T-t}\} \tag{6}$$

当 $t=0$ 时，有 $\mathrm{VaR}(V_0,\alpha) = V_0 \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T}\}$。由式(6)我们可以得到在险价值与债券的剩余期限($T-t$)之间的关系。由于违约边界 $K(t)$ 为在险价值的下限，为此可以假定违约边界 $K(t)$ 也具有类似的函数关系，设

$$K(t) = K \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T-t}\} \tag{7}$$

K 为一常数。

三、模型求解

对于一般的违约边界，利用(2)式、(5)式和(6)式，可得

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0, V_t \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T-t}\} \geqslant K(t)\}$$

$$= \inf\{t \geqslant 0, B_t \geqslant \frac{1}{\sigma} \ln \frac{K(t)}{V_0} + \Phi_\alpha \sqrt{T-t} + \frac{1}{\sigma}(\frac{\sigma^2}{2} - r)T\}$$

即违约时刻为布朗运动首次到达边界$\frac{1}{\sigma} \ln \frac{K(t)}{V_0} + \Phi_\alpha \sqrt{T-t} + \frac{1}{\sigma}(\frac{\sigma^2}{2} - r)T$ 的时刻，此时，若能求解出首达时τ的概率密度$f(t)$，则可得到零息债券定价公式

$$C(t,T) = \exp(-r(T-t))P(\tau > T) + R\int_0^T f(s)\exp(-r(s-t))\,\mathrm{d}s \tag{8}$$

这里的 $P(\tau > T)$ 为该债券不违约的概率。我们可以通过 Monte Carlo 模拟来计算得出式(8)数值。当违约边界满足式(7)时，违约时刻变为

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0, \mathrm{VaR}(V_t,\alpha) \geqslant K(t)\}$$

$$= \inf\{t \geqslant 0, V_t \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T-t}\} \geqslant K \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \Phi_\alpha \sigma \sqrt{T-t}\}\}$$

$$= \inf\{t \geqslant 0, V_t \geqslant K\} = \inf\{t \geqslant 0, (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \geqslant \ln \frac{K}{V_0}\}$$

利用线性漂移布朗运动首达时分布的结论，可以得到

$$P(\tau \leqslant t) = N\left(\frac{\ln(\frac{K}{V_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp(2\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} \ln \frac{K}{V_0}) N\left(\frac{-\ln \frac{K}{V_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{9}$$

N 为标准正态分布的累积分布，当 K 为债券面值时，我们得到了与 Merton 一样的结论：

$$C(t,T)=V_tN(d_1)+K\exp(-r(T-t))N(d_2)^{[1]} \tag{10}$$

其中 $d_1=\dfrac{\ln(V_t/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$，$d_2=\dfrac{\ln(V_t/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$。

根据式(8)给出的一般付息债券定价公式，若该债券在 $t_1,t_2,\cdots,t_n=T$ 时得到的利息分别为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，债券的面值为 F，记 $B(0,T)$ 为债券在零时刻的价格，则该付息债券在 0 时刻的风险中性定价公式为

$$B(0,T)=\sum_{i=1}^{N-1}q_iC(0,t_i)+(q_n+F)C(0,T)。$$

四、模型推广

在债券的有效期内，无风险利率通常不是固定不变的，而是随时间变化而变化的，因而假设无风险利率为常数与现实差距较大，为此，我们将前述模型推广到随时间变化的无风险利率模型。设无风险利率 $r(t)$ 为时间 t 的确定性函数，此时公司价值过程式(4)的 r 需要换为 $r(t)$，类似于式(3)，到期日为 T、面值为 1 元的零息债券在 t 时刻的价格为

$$C(t,T)=E\{1_{\tau>T}\exp(-\int_t^T r(s)ds)+R1_{\tau\leqslant T}\exp(-\int_t^{\tau} r(s)\mathrm{d}s)\} \tag{11}$$

我们可以通过 Monte Carlo 模拟来计算出式(11)的数值。

类似于式(6)，

$$\mathrm{VaR}(V_t,\alpha)=V_t\exp\{\int_t^T r(s)ds-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-\Phi_\alpha\sigma\sqrt{T-t}\},$$

违约时刻

$$\tau=\inf\{t\geqslant0,V_t\exp\{\int_t^T r(s)ds-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-\Phi_\alpha\sigma\sqrt{T-t}\}\geqslant K(t)\}$$

$$=\inf\{t\geqslant0,B_t\geqslant\frac{1}{\sigma}\ln\frac{K(t)}{V_0}+\Phi_\alpha\sqrt{T-t}+\frac{\sigma}{2}T-\frac{1}{\sigma}\int_0^T r(s)ds\}。$$

若违约边界 $K(t)$ 具有类似于 $\mathrm{VaR}(V_t,\alpha)$ 的函数形式，则可以假设

$$K(t)=K\exp\{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-\Phi_\alpha\sigma\sqrt{T-t}\}$$

此时，违约时刻

$$\tau=\inf\{t\geqslant0,V_t\exp\{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-\Phi_\alpha\sigma\sqrt{T-t}\}\geqslant K(t)\} \tag{12}$$

$$=\inf\{t\geqslant0,V_t\geqslant K\}=\inf\{t\geqslant0,\int_0^t r(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2t+\sigma B_t\geqslant\ln\frac{K}{V_0}\}$$

债券的风险中性定价公式为

$$C(t,T)=P(\tau>T)\exp(-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s)+R\int_t^T f(u)\exp(-\int_t^u r(s)ds)du$$

其中 $f(t)$ 为违约时刻式(12)的概率密度。

五、结束语

本文讨论了基于 VaR 模型的违约风险债券定价问题，发现当债券的在险价值超过某一边界时，债券将发生违约，因而可以判定违约时刻为内生的变量，是可以预料的。将市场中比较成熟的 VaR 方法引入到风险定价中将更有利于用定价模型来管理控制信用风险。本文分析了无风险利率为常数时的债券定价，并探讨了可能的违约边界，发现在一特殊违约边界时，模型简化为经典的 Merton 模型。本文还探讨了当无风险利率为随时间变化的情形。由于对于一般情形的边界，给出一个解析的定价公式比较困难，我们将在后续研究中重点分析如何利用 Monte Carlo 方法进行计算。

参考文献：

[1]Merton R. On the pricing of corporate debt the risk structure of interest rates [J]. Journal of Finance, 1974, 29: 449 -470.

[2]Black F,Cox J. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31: 351 -367.

[3]Merton R. On the pricing of contingent claims and the Modigliani - Miller Theorem [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5:241 -249.

[4]Shimko D, Tejima N, Deventer D. The pricing of risky debt when interest rates are stochastic [J]. The Journal of Fixed Income,1993,3:58 -65.

[5]Leland H. Corporate debt value, bond covenants and optimal capital structure [J]. Journal of Finance, 1994, 49:1213 -1252.

[6]Zhou Chunsheng . A jump diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities [R/OL]. SSRN Working Paper, 1997.[2010 -05 -01]. http://ssrn.com/abstract =39800 or doi:10.2139/ssrn.39800

[7]Scherer M. A structural credit risk model based on a jump diffusion[R/OL]. Working Paper, 2005.[2010 -05 -01]. http://ivanov.alexei.googlepages.com/WPScherer2005_1.pdf

[8]Bharath S, Shumway T. Forecasting default with the Merton distance to default model [J]. Review of Financial Studies, 2008, 20:1339 -1369.

[9]Fouque J P, Sircar R, Solna K. Stochastic volatility effects on defaultable bonds [J]. Applied Mathematical Finance,2006, 13(3):215 -244.

[10]Artzner P, Delbaen F. Default risk insurance and incomplete markets [J]. Mathematical Finance, 1995, 5: 187 -195.

[11]Jarrow R, Turnbull S. Pricing options on financial securities subject to default risk[J]. Journal of Finance,1995, 50: 53 -86.

[12]Jarrow R, Lando D, Turnbull S. A Markov Model for the term structure of credit spreads [J]. Review of Financial Studies, 1997, 10: 481 -523.

[13]Duffie D, Singleton K. Modeling term structures of defaultable bonds[J]. Review of Financial Studies, 1999, 12:687 -720.

[14]Duffie D, Lando D. Term structures of credit spreads with incomplete accounting information [J]. Econometrica, 2001, 69(3): 633 -664.

[15]Duffie D, Saita L, Wang Ke. Multi-period corporate default prediction with stochastic covariates[J]. Journal of Financial Economics, 2007, 83:635 -665.

[16]李兴发. 信用风险理论、模型及其应用研究[D]. 东北财经大学, 2007.

（责任编辑：杨凤春）

Pricing of Credit Risk Based on VaR

LIU Guang-ying

(School of Mathematics and Statistics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China)

Abstract: In this paper, we study the pricing of default risk in the structural credit risk model. VaR was treated as a kind of important risk management method, and encouraged by Basel Commission. We introduce the method of VaR into the pricing model of credit risk and assume the default time is the time which the VaR from market excesses the VaR of deterministic value. We analyze the value of the zero-coupon bond and suggest that we can use Monte Carlo method to obtain the pricing of bond. We also consider the value of bond in the situation in which the risk-free rate is the deterministic function of time.

Key words: VaR; credit risk; defaultable bond; first passage time