有限维线性空间直和分解问题的新探索

张宝善,沈 雁

(南京审计学院 数学与统计学院, 江苏 南京 210029)

摘 要:线性空间直和分解问题在数学、力学及许多应用领域有着广泛的应用。本文利用哈密尔顿-凯莱定理得到了 n 维向量空间的一个适用范围更为广泛的直和分解定理和一些重要推论,拓展了向量空间直和分解使用范围,通过范例说明直和分解的具体方法和实际过程。

关键词:n 维线性空间;哈密尔顿-凯莱定理;直和分解

中图分类号:O15.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-8750(2010)04-0078-04 **收稿日期**:2010-03-18

作者简介:张宝善(1959—),男,江苏丰县人,南京审计学院数学与统计学院教授,博士,主要研究方向为应用微分方程、经济数学模型、计算机代数;沈雁(1958—),女,江苏徐州人,南京审计学院数学与统计学院公共教学部主任,副教授,主要研究方向为几何拓扑学与代数学。

基金项目:南京审计学院硕士点建设项目(202720035)

一、引言

在抽象代数学中有许多重要定理及应用,哈密尔顿-凯莱定理就是其中之一。这个定理是凯莱在1858年最早提出[1-2],通常叙述为

定理1 (Hamilton-Cayley) 设 A 是数域 P 上一个 $n\times n$ 矩阵,$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)$ 是 A 的特征多项式,则

$$f(A)=A^n-TrAA^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det AE\equiv O \tag{1.1}$$

线性空间直和分解问题是 Hamilton-Cayley 定理的重要应用,有许多文献讨论 Hamilton-Cayley 定理的推广及应用[2-5]。线性空间直和分解问题在数学、力学、物理学及许多领域有着广泛的应用,文献[6-9]讨论了直和分解定理的证明与应用,得到许多有用的结果。目前,这方面的研究工作大都是围绕下面的线性空间直和分解定理[1]展开。

定理2 (直和分解定理) 设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间,A 是 V 上的线性变换,如果 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 P 上具有分解式

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{r_i},\ \sum_{i=1}^{s} r_i=n, \tag{1.2}$$

则 V 具有直和分解

$$V=\sum_{i=1}^{s} V_i=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s, V_i=\{\xi\mid(A-\lambda_iE)^{r_i}\xi=0,\xi\in V\}\ (i=1,2,\cdots,s) \tag{1.3}$$

其中,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 P 中互不相同的数,E 是 V 上的恒等变换。

但是,当数域 P 不是复数域(例如实数域、有理数域等)时,线性变换的特征多项式未必总能分解为(1.2)的形式,因而未必有(1.3)的直和分解。

本文利用哈密尔顿-凯莱定理给出 n 维向量空间的一个适用范围更为广泛的直和分解定理和一些重要推论,拓展了向量空间直和分解使用范围,解决了线性变换的特征多项式不能分解为(1.2)的形式的直和分解问题。

二、有限维线性空间直和分解的新定理

现在给出有限维线性空间直和分解的一个新结果。

定理 3 设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间,A 是 V 上的线性变换,如果 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 P 上具有分解式

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}h_i(\lambda),h_1(\lambda),h_2(\lambda),\cdots,h_s(\lambda)\text{在 }P\text{ 中两两互素}, \tag{2.1}$$

则 V 具有直和分解

$$V=\sum_{i=1}^{s}V_i=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,V_i=\{\xi\mid h_i(A)\xi=0,\xi\in V\}\ (i=1,2,3\cdots,s)。 \tag{2.2}$$

证明 对(2.1)情形的特征多项式 $f(\lambda)$ 构造多项式

$$f_i(\lambda)=\prod_{j\neq i}h_j(\lambda),(i=1,2,3\cdots,s), \tag{2.3}$$

则有 $f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_s(\lambda)$ 互素,$f_i(\lambda)$ 与 $h_i(\lambda)$ 互素,并且 $f(\lambda)=f_i(\lambda)h_i(\lambda),(i=1,2,\cdots,s)$。记

$$V_i=\{\xi\mid h_j(A)\xi=0,\xi\in V\}\ (i=1,2,3\cdots,s), \tag{2.4}$$

于是存在数域 P 上多项式 $u_1(\lambda),u_2(\lambda),\cdots,u_s(\lambda)$ 使得 $\sum_{i=1}^{s}f_i(\lambda)u_i(\lambda)\equiv1$,相应地有

$$\sum_{i=1}^{s}f_i(A)u_i(A)\equiv E。$$

从而对 $\forall\alpha\in V$ 有,

$$\alpha=E\alpha=\left(\sum_{i=1}^{s}f_i(A)u_i(A)\right)\alpha=\sum_{i=1}^{s}f_i(A)u_i(A)\alpha\equiv\sum_{i=1}^{s}\beta_i,$$

这里 $\beta_i=f_i(A)u_i(A)\alpha,(i=1,2,\cdots,s)$。运用哈密尔顿-凯莱定理容易得到

$$h_j(A)\beta_i=h_i(A)f_i(A)u_i(A)\alpha=u_i(A)(f(A)\alpha)=u_i(A)o=o,(i=1,2,\cdots,s)$$

这表明 $\beta_i=f_i(A)u_i(A)\alpha\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$,故有分解

$$V=\sum_{i=1}^{s}V_i。$$

下面证明这个和分解是直和分解。

设 V 中零向量具有分解 $o=\sum_{i=1}^{s}\gamma_i,\gamma_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$,对每一 j,注意到

$$f_j(A)\gamma_i=o(\forall i\neq j)$$

这是因为由(2.3)及假设条件有 $h_i(\lambda)$ 整除 $f_j(\lambda)$,用 $f_j(A)$ 作用这个零向量分解得到

$$o=f_j(A)o=\sum_{i=1}^{s}f_j(A)\gamma_i=f_j(A)\gamma_j。$$

再利用 $f_j(\lambda)$ 与 $h_j(\lambda)$ 互素性得知存在数域 p 上多项式 $u_j(\lambda),\nu_j(\lambda)$ 使得

$$u_j(\lambda)f_j(\lambda)+\nu_j(\lambda)h_j(\lambda)\equiv1,$$

相应地有 $u_j(A)f_j(A)+\nu_j(A)h_j(A)\equiv E$,从而有

$$\gamma_j=E\gamma_j=u_j(A)(f_j(A)\gamma_j)+\nu_j(A)(h_j(A)\gamma_j)=u_j(A)o+\nu_j(A)o=o。$$

因此,V 中零向量对 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 具有分解唯一性。所以 V 具有直和分解

$$V=\sum_{i=1}^{s}V_i=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s。 \tag{2.5}$$

最后由(2.4)、(2.5)得到(2.2)。定理证毕

附注 1:上述直和分解定理中,由(2.4)刻画的 V 的子空间 $V_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可能有一个或多个零子空间情形,但不可能全是零子空间。

事实上,由于 $f(A)=\prod_{i=1}^{s}h_i(A)\equiv O$,故有 $\prod_{i=1}^{s}\det h_j(\lambda)=0$,所以必然有 $\det h_j(\lambda)=0$,因而对应地 $V_j=\{\xi\mid h_j(A)\xi=0,\xi\in V\}\neq O$。

附注2:定理3中的$h_1(\lambda),h_2(\lambda),\cdots,h_s(\lambda)$只要求在$P$中两两互素,它们可以不是一次多项式因式。对于$h_1(\lambda),h_2(\lambda),\cdots,h_s(\lambda)$全为一次多项式方幂情形就是定理2,因此,定理3是一个比定理2更一般的直和分解定理。对于含有一次多项式因式情形,我们有结果:

定理4 设V是数域P上一个n维向量空间,A是V上的线性变换,如果A的特征多项式$f(\lambda)$在P上具有分解式

$$f(\lambda)=p(\lambda)\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{r_i},\ \sum_{i=1}^{s}r_i=n-\partial(p(\lambda)),\tag{2.6}$$

多项式$p(\lambda)$在P上无根,则V具有直和分解

$$V=\sum_{i=1}^{s}V_i+W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s\oplus W_p,\tag{2.7}$$

其中,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$P$中互不相同的数,$E$是$V$上的恒等变换,并且

$$V_i=\{\xi\mid(A-\lambda_iE)^{r_i}\xi=0,\xi\in V\}(i=1,2,\cdots,s),W_p=\{\xi\mid p(A)\xi=0,\xi\in V\}。\tag{2.8}$$

证明 由于A的特征多项式$f(\lambda)$在P上具有分解式$f(\lambda)=p(\lambda)\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$,令

$$h_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i},(i=1,2,3\cdots,s),h_{s+1}(\lambda)=p(\lambda),$$

A的特征多项式$f(\lambda)$在P上具有分解式$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}h_i(\lambda)$,根据假设$h_1(\lambda),h_2(\lambda),\cdots,h_s(\lambda)$在$P$中两两互素。记$V_{s+1}=W_p$,则由定理3知有直和分解

$$V=\sum_{i=1}^{s+1}V_i=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s\oplus V_{s+1},$$

亦即有直和分解$V=\sum_{i=1}^{s}V_i+W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s\oplus W_p$。定理证毕。

三、直和分解的应用

现在给出直和分解定理3的应用的两个例子。

例1 考虑4维线性空间$V=R^4$中由矩阵A决定的线性变换A:$A\alpha=A\alpha,\forall\alpha\in V$,的直和分解问题。其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&0&3\\0&0&1&3\\2&0&-1&2\end{pmatrix}。$$

此时,线性变换A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)^2(\lambda^2-3\lambda+5),\tag{3.1}$$

它在实数域R上只有特征值$\lambda_1=1$(二重,$r_1=2$),$p(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+5$在$R$上不可约。根据定理4,可以计算出

$V_1=\{\xi\mid(A-E)^2\xi=0,\xi\in V\}=L(\beta_1,\beta_2),\beta_1=(-1,3,0,2)^T,\beta_2=(1,2,2,0)^T$;

$V_2=\{\xi\mid(A^2-3A+5E)\xi=0,\xi\in V\}=L(\beta_3,\beta_4),\beta_3=(0,0,0,1)^T,\beta_4=(0,1,1,0)^T$,

容易验证$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$为$V$的一个基。显然$V=R^4$为$V_1,V_2$的直和。

应当看到,(3.1)表示的多项式不适合定理2,即不能用大家熟知的直和分解定理来完成上面的直和分解问题。因此,我们的结果拓广了直和分解的应用范围。下面的例子也是这样。

例2 考虑5维线性空间$V=R^5$中由矩阵A决定的线性变换A:$A\alpha=A\alpha,\forall\alpha\in V$的直和分解问题。其中

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -3 & 0 & 2 & -8\\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix}。$$

此时,线性变换 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda(\lambda^4-19\lambda^2+60\lambda+3)。\qquad(3.2)$$

记 $p_1(\lambda)=\lambda, p_2(\lambda)=\lambda^4-9\lambda^2+60\lambda+3$,则 $p_1(\lambda),p_2(\lambda)$在 R 上互素。根据定理3,可以计算出

$V_1=\{\xi|A\xi=0,\xi\in V\}=L(\beta_1),\beta_1=(7,6,14,1,-2)^T$;

$V_2=\{\xi|(A^4-19A^2+60A+3E)\xi=0,\xi\in V\}=L(\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$,

$\beta_2=(-8,0,0,0,11)^T,\beta_3=(8,0,0,11,0)^T,\beta_4=(1,0,11,0,0)^T,\beta_5=(6,11,0,0,0)^T$。

容易验证 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$ 为 V 的标准基。显然 $V=R^5$ 为 V_1,V_2 的直和。

顺便指出,不难发现,这个例子中线性变换 A 的特征多项式在实数域 R 上具有 3 个特征值 $\lambda_1=0$, $\lambda_2\approx-5.46595$, $\lambda_3\approx-0.049233$,但由于除 0 特征值外的实特征值 λ_2,λ_3 都是无理数,很难利用特征子空间 $V_{\lambda 2},V_{\lambda 3}$进行直和分解。但本例把 $V=R^5$ 分解为两个线性子空间的直和就比较简单了。

可见,本文利用特征多项式研究对线性空间的直和分解定理是十分必要和有用的。

参考文献:

[1]北京大学数学系. 高等代数[M]. 第三版. 北京:高等教育出版社, 2003:297-311.

[2]胥鸣伟. Caylay-Hamilton 定理的一个逆定理[J]. 数学译林,1986,4:247.

[3]孙杰. Hamilton-Caylay 定理的推广与应用[J]. 赤峰学院学报, 2006(6):2-4.

[4]林冠军. Hamilton-Caylay 定理在矩阵计算中的应用[J]. 闽江学院学报, 2003(6):5-7.

[5]马菊侠. Hamilton-Caylay 定理在矩阵运算中的应用研究[J]. 陕西科技大学学报, 2004(1):114-116.

[6]何淦瞳. 矩阵的拟直和分解与 Craig 定理[J]. 数学的实践与认识,2005(10):153-156.

[7]梁庆光. 线性空间直和分解一个定理的证明的教学建议[J]. 赣南师范学院学报, 1998(6):55-56.

[8]梁聪刚,赵伟杰. 线性空间在一类线性变换多项式下的直和分解[J]. 平顶山学院学报,2009(2):61-62.

[9]俱鹏岳,王欣欣. 直和分解新证[J]. 陇东学院学报:自然科学版,2007(1):17-18.

(**责任编辑:**黄 燕 许成安)

A New Probe to Direct Sum Decomposition Problem for Finite Dimension of Linear Space

ZHANG Bao-shan, SHEN Yan

(School of Mathematics and Statistics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China)

Abstract: The direct sum decomposition for finite dimension of linear space has a wide application in mathematics, mechanics and other applied areas. This paper provides a new theorem for the direct sum decomposition, and proves a direct sum decomposition theorem for finite dimension of linear space by the Cayley-Hamilton theorem. And in its application, it deduces the well-known direct sum decomposition theorem. Finally, two examples are discussed to illustrate the methods of direct sum decomposition.

Key words: the nth dimension of linear space; the Cayley-Hamilton theorem; direct sum decomposition