关于有理函数 k 阶导数不动点的讨论

仇惠玲

（南京审计学院 数学与统计学院，江苏 南京　210029）

摘　要: 本文研究了有理函数导数的不动点的存在性,其结果表明有理函数导数的不动点与该函数的零点和极点都有着密切的联系。

关键词: 有理函数; 零点; 极点; 不动点

中图分类号: O174.5　**文献标识码:** A　**文章编号:** 1672 - 8750(2010)04 - 0082 - 04　**收稿日期:** 2010 - 06 - 30

作者简介: 仇惠玲(1957—　),女,江苏连云港人,南京审计学院应用数学与统计学院教授,博士,主要研究方向为实与复分析。

一、引言和主要结果

若 $f(z)$ 为复平面上的亚纯函数[1], k 为正整数,当 $f(z)$ 为超越时,其 k 阶导数 $f^{(k)}(z)$ 不动点的存在性有下列结论:

定理 A[2]　设 $f(z)$ 为超越亚纯函数,且 n 为正整数,则 $[f^n(z)]'$ 有无穷多个不动点。

定理 B[3]　设 $f(z)$ 为一个有穷级超越亚纯函数,且 k 为正整数,如果 $f(z)$ 的零点重数均 $\geqslant k+1$,则 $f^{(k)}(z)$ 有无穷多个不动点。

最近徐俊峰等人推广了上述结论[4],给出了下面的结果:

定理 C[4]　设 $f(z)$ 为超越亚纯函数,且 k 为正整数数,如果(1) $f(z)$ 的零点重数 $\geqslant k+1$,(2) $f(z)$ 的极点重数 $\geqslant 2$,则 $f^{(k)}(z)$ 有无穷多个不动点。

自然地,我们要问:若 $f(z)$ 为非超越亚纯函数(即有理函数),如果 $f(z)$ 满足定理 C 的条件(1)和(2),那么 $f^{(k)}(z)$ 是否存在不动点呢? 答案是否定的。

例 1　设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{2z^2}$,满足(1) $f(z)$ 的零点的级 $\geqslant 2$,(2) $f(z)$ 的极点重数 $\geqslant 2$ 但 $f'(z)=z-\dfrac{1}{z^3}$ 不存在不动点。

上面的例 1 表明定理 C 关于超越亚纯函数的导数存在不动点的结论不能推广到一般的亚纯函数上。

因此我们有必要讨论有理函数当满足什么条件时,必存在不动点。本文有下列结论:

定理 1　设 $f(z)$ 为有理函数且至少有两个不同的极点, k 为正整数,则 $f^{(k)}(z)$ 必存在不动点。

定理 2　设 $f(z)$ 为有理函数且只有一个极点, k 为正整数。若 $f(z)$ 的零点重数 $\geqslant k+1$ 且满足下列条件之一,则 $f^{(k)}(z)$ 必存在不动点。

(1) $f(z)$ 至少有三个不同的零点;

(2) $f(z)$ 有两个不同的零点,且 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的极点;

(3) $f(z)$ 只有一个零点,且 $f(z)$ 的极点重数 $\geqslant 2$。

下面用三个例子分别来说明定理 2 中的某一个条件不满足时, $f^{(k)}(z)$ 就可能没有不动点。

例 1　$f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{2z^2}$ 有两个不同的零点且重数为 2,但 $f(z)$ 有一个极点为 0,故不满足定理 2 中的

条件(2),此时$f'(z)=z-\frac{1}{z^3}$没有不动点。

例 2　$f(z)=\frac{(z^2-1)(z^2+1)^2}{2z^4}$有四个不同的零点但不满足“零点重数≥2”,此时$f'(z)=z+\frac{8}{z^5}$没有不动点。

例 3　$f(z)=\frac{(z-\frac{1}{4})^4}{6(z-1)}$只有一个零点且重数为4,但有一个简单极点不满足定理2中的条件(3),此时$f''(z)=z+\frac{1}{3(z-1)}$没有不动点。

二、一些引理

引理1　设有理函数$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$有$l(l\geq 1)$个不同的极点,其中$p(z)$,$q(z)$为互质的两个多项式,$\deg p=m<\deg q=n$,k为正整数。若$f^{(k)}(z)=\frac{p_k(z)}{q_k(z)}$(其中$p_k(z)$,$q_k(z)$为互质的两个多项式),则$\deg p_k=m+(l-1)k$,$\deg q_k=n+lk$。

证明:显然只需证明$k=1$时结论成立即可。(因为k阶导数是$k-1$阶导函数的一阶导数,由递推即得)

因为$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$,$f'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q^2(z)}=\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$,这里$p_1(z)$,$q_1(z)$为互质的两个多项式。

显然$\deg q_1(z)=n+l=2n-(n-l)$(因为对函数求一阶导数后极点的级要增加一阶,但不会增加新的极点),从而$\deg p_1(z)=m+n-1-(n-l)=m+l-1$。证毕。

引理2　设有理函数$f(z)=\frac{p(z)}{(z-a)^2}$($p(z)$为多项式且$p(a)\neq 0$,$0\leq\deg p<n$),$k$为正整数。

设$f^{(k)}(z)=\frac{p_k(z)}{(z-a)^{n+k}}$,则$\deg p_k=\deg p$。

证明:因为$f(z)$只有一个极点,由引理1得

$\deg p_k=\deg p+(l-1)k=\deg p$。证毕。

引理3　设有理函数$f(z)=\frac{p(z)}{(z-a)^n}$($p(z)$为$m$次多项式且$p(a)\neq 0$),$n,k$为正整数。若$f^{(k)}(z)$没有不动点,则

(1) $m=n+k+1$;

(2) $f(z)$必定可以表示成:$f(z)=\frac{1}{(k+1)!}z^{k+1}+P_{k-1}(z)+\frac{c}{(z-a)^n}$,其中$P_{k-1}(z)$为多项式且$\deg P_{k-1}(z)\leq k-1$,$c$为非零常数。

证明:因为$f^{(k)}(z)$没有不动点且a是$f^{(k)}(z)$的$n+k$重极点,

所以$f^{(k)}(z)=z+\frac{c_1}{(z-a)^{n+k}}$,其中$c_1$为非零常数。

对$f^{(k)}(z)$进行k次积分:

$f^{(k-1)}(z)=\frac{1}{2}z^2+d_1+\frac{c_2}{(z-a)^{n+k-1}}$,其中$d_1$,$c_2$均为常数,

$f^{(k-2)}(z)=\frac{1}{3}z^3+d_1z+d_2+\frac{c_3}{(z-a)^{n+k-2}}$,其中$d_1$,$d_2$,$c_3$均为常数,

……

$f'(z)=\frac{1}{k!}z^k+\frac{d_1}{(k-2)!}z^{k-2}+\cdots+d_{k-2}z+d_{k-1}+\frac{c_k}{(z-a)^{n+1}}$，其中 $d_1,d_2,\cdots,d_{k-1},c_k$ 均为常数，

$f(z)=\frac{1}{(k+1)!}z^{k+1}+P_{k-1}(z)+\frac{c}{(z-a)^n}$，

从而(2)成立，由(2)即可推出(1)。证毕。

三、定理的证明

定理1　的证明：设 $f(z)=R(z)+\frac{p(z)}{q(z)}$ 有 $l(l\geqslant 2)$ 个不同的极点，

上式中 $R(z),p(z),q(z)$ 均为多项式，$p(z),q(z)$ 互质且 $0\leqslant \deg p=m<\deg q=n$。

因此　$f^{(k)}(z)=R^{(k)}(z)+\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right)^{(k)}$。

设 $\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right)^{(k)}=\frac{p_k(z)}{q_k(z)}$（其中 $p_k(z),q_k(z)$ 为互质的两个多项式）。

若 $f^{(k)}(z)$ 没有不动点，则 $R^{(k)}(z)=z,p_k(z)=c$ 为常数，所以 $\deg p_k=0$。

另一方面，由引理1知 $\deg p_k=m+(l-1)k$，从而 $m+(l-1)k=0$，于是 $l=1$，矛盾。

因此 $f^{(k)}(z)$ 存在不动点。证毕。

定理2的证明：设 $f(z)=\frac{p(z)}{(z-a)^n}$（$p(z)$ 为 m 次多项式且 $p(a)\neq 0$），k 为正整数。

若 $f^{(k)}(z)$ 没有不动点，由引理3知

$$f(z)=\frac{1}{(k+1)!}z^{k+1}+P_{k-1}(z)+\frac{c}{(z-a)^n}\tag{1}$$

其中 $P_{k-1}(z)$ 为多项式且 $\deg P_{k-1}(z)\leqslant k-1$，$c$ 为非零常数。

$$f^{(k-1)}(z)=\frac{1}{2}\left(z^2+c_1+\frac{c_2}{(z-a)^{n+k-1}}\right)=\frac{(z^2+c_1)(z-a)^{n+k-1}+c_2}{2(z-a)^{n+k-1}}\tag{2}$$

令 $g(z)=(z^2+c_1)(z-a)^{n+k-1}+c_2$　(3)

因 $f(z)$ 的零点重数 $\geqslant k+1$，所以 $f(z)$ 的零点都是 $f^{(k-1)}(z)$ 的零点且重数 $\geqslant 2$，于是 $f(z)$ 的零点都是 $g'(z)$ 的零点，而

$$g'(z)=(z-a)^{n+k-2}((n+k+1)z^2-2az+c_1(n+k-1))\tag{4}$$

因为 a 是 $f(z)$ 的极点，所以由(4)知 $f(z)$ 至多有两个不同的零点，因此当 $f(z)$ 至少有三个不同的零点时，$f^{(k)}(z)$ 必存在不动点。

下面对 $f(z)$ 的零点分两种情况讨论：

(1) 若 $f(z)$ 只有一个零点。由引理3，可设

$$f(z)=\frac{c(z-b)^{n+k+1}}{(z-a)^n}\tag{5}$$

因为 $(z-b)^m=(z-a+a-b)^m=(z-a)^m+C_m^1(a-b)(z-a)^{m-1}+\cdots+C_m^{m-1}(a-b)^{m-1}(z-a)+(a-b)^m$　(6)

由(5)和(6)得

$$f(z)=c\left((z-a)^{k+1}+C_{n+k+1}^{1}(a-b)(z-a)^k+\cdots+C_{n+k+1}^{k+1}(a-b)^{k+1}+\frac{h(z)}{(z-a)^n}\right)\tag{7}$$

其中

$h(z)=C_{n+k+1}^{k+2}(a-b)^{k+2}(z-a)^{n-1}+C_{n+k+1}^{k+3}(a-b)^{k+3}(z-a)^{n-2}+\cdots+C_{n+k+1}^{k+n}(a-b)^{k+n}(z-a)+(a-b)^{n+k+1}$

当 $n\geqslant 2$ 时，$h(z)$ 不恒为常数，由(7)及引理2知 $f^{(k)}(z)$ 必存在不动点。

(2) 若 $f(z)$ 有两个不同的零点 b_1,b_2，

设$f(z)=\dfrac{c(z-b_1)^{m_1}(z-b_2)^{m_2}}{(z-a)^n}$

由引理3,不妨设

$$m_1+m_2=n+k+1 \tag{8}$$

因为$f(z)$的零点的重数$\geqslant k+1$,所以 $m_1\geqslant k+1, m_2\geqslant k+1$,

再由(2),(3)及(7)知 b_1, b_2 必是 $g'(z)$的简单零点,从而也是$f(z)$的 $k+1$ 重零点,即:$m_1=m_2=k+1$。由 $m_1+m_2=n+k+1$,推得 $n=k+1$。

令 $s(z)=(n+k+1)z^2-2az+c_1(n+k-1)$(其中 c_1 为常数) (9)

由(4)知 b_1, b_2 是 $s(z)$的两个零点,因为 $n=k+1$,

所以 $b_1+b_2=\dfrac{a}{k+1}$ (10)

另一方面,若$f^{(k)}(z)$没有不动点,由引理3,$f(z)$可以表示成:

$$f(z)=\frac{1}{(k+1)!}\left[z^{k+1}+P_{k-1}(z)+\frac{c}{(z-a)^n}\right]=$$

$$\frac{1}{(k+1)!\ (z-a)^n}[z^{k+1}(z-a)^n+P_{k-1}(z)(z-a)^n+c]=$$

$$\frac{1}{(k+1)!\ (z-a)^n}[z^{n+k+1}-naz^{n+k}+\cdots] \tag{11}$$

由(8),(11)及 $m_1=m_2=k+1, n=k+1$ 可知,

$$b_1+b_2=a \tag{12}$$

因为 $k\geqslant 1$,由(10)和(12)可得 $a=0$。

所以当 $a\neq 0$ 时,$f^{(k)}(z)$必存在不动点。证毕。

参考文献:

[1]Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964:1-15.

[2]方明亮. A note on problem of hayman [J]. Analysis, 2000(1): 45-49.

[3]顾永兴,庞学诚,方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2007:1-18.

[4]徐俊峰,张占亮. 与不动点和多项式有关的亚纯函数导数的零点[J]. 山东大学学报:理学版,2007(5):1-4.

(**责任编辑:黄　燕　许成安**)

Fixed Points of Order Derivatives of Rational Functions

QIU Hui-ling

(Department of Applied Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 210029, China)

Abstract: In this paper, we indicate the existence of fixed points of derivatives of rational function, and its close relation to zeroes and poles of $f(z)$.

Key words: rational function; zeroes of function; poles of function; fixed point.